

LA COMPRENSIÓN DE LA MEDIANA

A COMPREENSÃO DA MEDIANA

UNDERSTANDING THE MEDIAN

SILVIA M. VALENZUELA RUIZ^I

NURIA BEGUÉ PEDROSA^{II}

JOCELYN DÍAZ PALLAUTA^I

^IUniversidad de Granada (UGR), Granada – España

^{II}Universidad de Zaragoza (UNIZAR), Zaragoza - España

RESUMEN En este trabajo se realiza un análisis semiótico de la mediana. Basándonos en la clasificación de objetos primarios que se establece en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (Enfoque Ontosemiótico), consideramos los problemas para los que es útil, sus diferentes definiciones y propiedades, el lenguaje asociado y los algoritmos de cálculo. Respecto a cada uno de estos puntos, resumimos las investigaciones didácticas que sugieren la existencia de dificultades frecuentes en el trabajo con la mediana. El interés de elaborar este análisis queda justificado por la inclusión en los currículos, tanto de Educación Secundaria Obligatoria como de Bachillerato, del análisis exploratorio de datos, donde la mediana tiene un papel significativo. Además, el trabajo presentado proporciona un modelo para el análisis semiótico de otros objetos matemáticos, necesario para detectar las posibles dificultades de los estudiantes a la hora de trabajar con las tareas que se les proponen y diseñar de forma adecuada el proceso de enseñanza y aprendizaje.

PALABRAS CLAVES: MEDIANA; ANÁLISIS SEMIÓTICO; ENSEÑANZA.

RESUMO Neste trabalho é realizada uma análise semiótica da mediana. Com base na classificação de objetos primários que se estabelece na Abordagem Ontosemiótica do Conhecimento e Instrução Matemática (Enfoque Ontosemiótico), consideramos os problemas para os quais esta é útil, as suas diferentes definições e propriedades, a linguagem associada e os algoritmos de cálculo. Em relação a cada um desses pontos, sintetizamos a investigação didática que sugere a existência de dificuldades frequentes no trabalho com a mediana. O interesse em realizar esta análise é justificado pela inclusão nos currículos, tanto do Ensino Médio Obrigatório como do Bacharelado, da análise exploratória de dados, onde a mediana desempenha um papel significativo. Além disso, o trabalho apresentado fornece um

modelo para a análise semiótica de outros objetos matemáticos, necessário para detectar possíveis dificuldades dos alunos no trabalho com as tarefas que lhes são propostas e para conceber o processo de ensino e de aprendizagem de forma adequada.

PALAVRAS-CHAVE: MEDIANA; ANÁLISE SEMIÓTICA; ENSINO.

ABSTRACT In this work a semiotic analysis of the median is performed. Based on the classification of primary objects that is established in the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (Enfoque Ontosemiótico), we consider the problems for which it is useful, their different definitions and properties, the associated language and the calculation algorithms. Regarding each of these points, we summarize the didactic research that suggests the existence of frequent difficulties in working with the median. The interest in developing this analysis is justified by the inclusion in the curricula, both for Compulsory Secondary Education and for High School, of exploratory data analysis, where the median plays a significant role. In addition, the work presented provides a model for the semiotic analysis of other mathematical objects, necessary to detect possible difficulties for students when working with the tasks proposed to them and to design the teaching and learning process appropriately.

KEYWORDS: MEDIAN; SEMIOTIC ANALYSIS; TEACHING.

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la estadística tiene una gran presencia actualmente en el currículo escolar, debido a la necesidad de dotar al estudiante de sentido estadístico, que Batanero (2019) define como la unión de la cultura y el razonamiento estadístico, junto con unas actitudes adecuadas que lleven a valorar el papel de la estadística en la sociedad. Este sentido estadístico debiera permitir a todos los ciudadanos interpretar los numerosos mensajes con información estadística que se presentan en los medios de comunicación y tomar decisiones correctas basadas en esta evidencia (GAL; OGRAJENŠEK, 2017). En el mismo sentido, otros autores describen la estadística cívica, como el conjunto de conocimientos estadísticos y sociales y, actitudes hacia la estadística que permiten la participación democrática de los ciudadanos en la sociedad y que es hoy día más necesaria que nunca (ENGEL, 2019).

Nuestro trabajo se centra en la mediana debido a su interés, desde muchos puntos de vista. En el análisis exploratorio de datos, la mediana y otros estadísticos de orden, como los cuartiles, deciles y percentiles tienen un papel significativo porque son estadísticos robustos y no se ven muy afectados por los valores atípicos (MORGENTHALER, 2009). Estos estadísticos de orden son resúmenes de una distribución que nos indican la posición que un cierto valor ocupa dentro de un conjunto de datos ordenados, por tanto, nos informan del porcentaje de datos que tienen un valor de la variable menor o igual que el estadístico (HOLCOMB, 2016). Son muy utilizados cuando se trabaja con datos ordinales y en distribuciones asimétricas.

Los estadísticos de orden también están presentes en nuestra vida diaria. Por ejemplo, durante los primeros años del desarrollo del niño es común comparar su peso o su altura

dentro de su grupo de edad para ver si el niño progresa adecuadamente. También aparecen estos estadísticos al situar un país o una región en un ranking de tipo científico, económico o sanitario respecto a otros países o regiones. Igualmente, Bakker y Gravemeijer (2006) indican que la mediana ha sido usada a lo largo de la historia para describir muchos fenómenos de sociología y psicología e, incluso en astronomía. La mediana es también la medida de tendencia central más apropiada para el estudio de datos que no siguen el modelo de la curva normal, cuando existen valores atípicos dentro del conjunto de datos y tiene gran relevancia en la inferencia no paramétrica, que se usa en condiciones de no normalidad o en muestras pequeñas.

Las directrices curriculares en España refuerzan en los últimos diseños curriculares la enseñanza de la estadística en los diferentes cursos de educación obligatoria con la finalidad de preparar al estudiante para tener un papel activo en la sociedad de la información. En concreto, la normativa vigente incluye el concepto de mediana y otros estadísticos de orden, como percentiles y cuartiles, tanto para el ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (12-15 años) como para el Bachillerato (16-17 años). La mediana aparece por primera vez en el currículo en el segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria (MECD, 2015) donde se menciona su definición y cálculo, y continúa a lo largo de todos los cursos. En Bachillerato se profundiza en sus propiedades y aplicaciones en la resolución de problemas estadísticos. Además, es usual encontrar su enseñanza en los cursos universitarios de estadística, tanto de pregrado como de grado. En general, el estudio de la estadística dentro de la enseñanza de las Matemáticas ayuda a los estudiantes a mejorar en ciertos aspectos como, la resolución de problemas abiertos, el trabajo interdisciplinar y con datos reales, el uso de sistemas de representación múltiple y el trabajo con ordenadores o calculadoras gráficas.

Aunque esta amplia presencia curricular llevaría a pensar que la mediana es un concepto bien comprendido, algunas investigaciones sugieren la existencia de dificultades frecuentes en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria (COBO, 2003), Bachillerato (MAYÉN, 2009; MAYÉN; COBO; BATANERO; BALDERAS, 2007) e incluso en futuros profesores (JACOBBE; CARVALHO, 2011; GEA; BATANERO; FERNÁNDEZ; ARTEAGA, 2016). Estas investigaciones ponen en relieve que el objeto mediana resulta complejo a los diferentes sujetos. Este hecho ha conducido, por tanto, a la necesidad de plantear este trabajo donde realizamos un análisis de los objetos matemáticos elementales relacionados con la mediana, a la vez que describimos y clasificamos las principales dificultades asociadas a los mismos. La finalidad es proporcionar al profesor que participa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este concepto una ayuda tanto en la planificación de la enseñanza, como en la evaluación de su comprensión por parte de los estudiantes. Es decir, el análisis del objeto según el marco teórico pone en relieve las complejidades del mismo, por lo que dicha información puede ser una guía que ayude a la superación de los mismos.

2. FUNDAMENTOS Y PROCEDIMIENTOS METODOLÓGICOS

Nuestra investigación parte del análisis del concepto de mediana usando algunas nociones del enfoque ontosemiótico (Enfoque Ontosemiótico), un marco teórico desarrollado

en la Universidad de Granada, que ha servido de apoyo al desarrollo de muchos trabajos de educación estadística en dicha universidad. Dicho marco teórico (GODINO, 2002; GODINO; BATANERO; FONT, 2007; 2019) otorga un papel predominante a la resolución de problemas, entendido este término en sentido muy amplio, como cualquier problemática intra o extramatemática que induce una actividad de matematización. Utilizaremos de este marco en particular, la noción de significado, que los autores definen como el sistema de prácticas que realiza una persona, o que se llevan a cabo en el seno de una institución, para resolver una cierta clase de situaciones-problemas relacionadas con el objeto cuyo significado se estudia. Los problemas relacionados con un objeto matemático suelen agruparse en campos o tipos de problemas; por ejemplo, el obtener una medida de posición central para una distribución asimétrica sería un campo de problemas que engloba muchos problemas particulares, según la distribución particular que se considere.

En el Enfoque Ontosemiótico se entiende por institución a un conjunto de personas que se interesan por resolver una misma clase de situaciones-problemas y aplican herramientas compartidas. Un ejemplo sería la institución escolar, formada por los diseñadores del currículo y los profesores que pretenden impartir un contenido concreto para un tema matemático, en nuestro caso, la mediana. Otra institución diferente sería la de estadísticos profesionales, que resuelven problemas de diferentes campos utilizando la estadística.

En este marco teórico, el significado de un objeto matemático se refiere al conjunto de prácticas (interiorizadas o no) que se realizan para resolver problemas en relación con dicho objeto. Por tanto, en relación con la mediana, será necesario considerar las prácticas matemáticas relacionadas con los problemas que se resuelven utilizando la mediana. Además, se considera preciso diferenciar entre una dimensión personal (subjética, mental) e institucional (objetiva) para este significado (GODINO; BATANERO, 1994, 1998). Por tanto, cuando hablamos de significado personal nos referimos al resultado obtenido a través del razonamiento y la práctica individual de un sujeto al resolver una determinada clase de problemas, mientras que al resultado del diálogo y convenios dentro de una institución (en el caso que nos ocupa: el sistema educativo) lo consideramos como significado institucional. Estas dimensiones no son equivalentes, pues el significado personal que un estudiante asigne a un objeto matemático puede ser diferente al considerado correcto dentro de la institución escolar.

En este estudio, el significado institucional de la mediana será el fijado en los currículos oficiales de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, mientras que el significado personal sería el conjunto de prácticas que los estudiantes realizan cuando se enfrentan a problemas relacionados con la mediana. La consideración de esta doble perspectiva personal-institucional sobre el significado y comprensión de los objetos matemáticos es imprescindible, ya que durante el proceso de aprendizaje el alumno puede construir un significado que no corresponde con el establecido por la institución.

En el Enfoque Ontosemiótico se asume una clasificación de objetos primarios que se ponen en juego dentro la actividad matemática y que se consideran como los elementos de significado (GODINO *et al.*, 2007; 2019). Concretamente, se proponen varios tipos de objetos matemáticos primarios que, a su vez, se organizan en entidades más complejas (sistemas conceptuales o, teorías). Por ejemplo, la mediana pertenece al sistema de estadísticos

de orden y éste al de resúmenes estadísticos de una distribución. Los objetos elementales pueden ser de varios tipos:

- *Campos de problemas:* Son las situaciones o aplicaciones que inducen actividades matemáticas de donde surge el objeto y pueden ser propias de la misma matemática o ajenas a ella. Un ejemplo intramatemático sería encontrar un representante de un conjunto de datos en una distribución asimétrica y otro extramatemático podría ser comparar el peso de un niño al nacer con los pesos de otros niños, para saber si ha nacido bajo de peso.
- *Algoritmos y procedimientos:* Son las acciones y operaciones, estrategias o técnicas que se emplean para resolver las situaciones o tareas y que, en la escuela, se convierte en materia para ser enseñada. Por ejemplo, para el caso de la mediana se enseñan diferentes algoritmos de cálculo, entre los que podemos diferenciar el cálculo con datos agrupados o sin agrupar, así como su cálculo según el número de datos sea par o impar. Otro ejemplo sería la técnica de obtención de la mediana y cuartiles y a partir de ellos para representar un gráfico de cajas.
- *Lenguaje:* Los objetos matemáticos son inmateriales, por tanto, se necesitan representaciones materiales de los mismos utilizadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos) tanto para operar con los objetos como para comunicar la solución de un problema. Por ejemplo, para trabajar con la mediana usamos expresiones como “mediana” “valor central”, “medida de posición” o las notaciones: Me , P_{50} , D_5 y Q_2 . Además, se emplean representaciones específicas como el diagrama de frecuencias acumuladas o el gráfico de cajas. Siguiendo a Schleppegrell (2007), resulta pertinente que el estudiante adquiriera una correcta utilización del lenguaje, pues en ocasiones asignan a los términos matemáticos significados que no les corresponde. Por tanto, el autor señala como uno de los principales desafíos de la enseñanza de la matemática el uso adecuado del lenguaje matemático.
- *Definiciones y propiedades:* En las prácticas realizadas al resolver problemas matemáticos surge la necesidad de utilizar ideas matemáticas abstractas, que deben ser definidas con precisión; también es necesario relacionarlas entre sí (de ello surgen los conceptos y proposiciones). En el caso de la mediana, el trabajo con dicho objeto lleva consigo el trabajo con otros conceptos tales como dato, variable y valor, rango, distribución, mínimo y máximo, frecuencia, frecuencia acumulada, frecuencia relativa y orden. Por otro lado, asociadas al concepto podemos encontrar propiedades numéricas, algebraicas y estadísticas, las cuales se describen en las siguientes secciones.
- *Argumentos:* Finalmente, todas estas acciones y objetos se ligan entre sí mediante argumentos o razonamientos que se usan para comprobar las soluciones de los problemas o explicar a otro la solución, por lo que la argumentación y el razonamiento es un fin importante en la enseñanza de las matemáticas. Estas argumentaciones pueden ser deductivas, inductivas, analógicas, formales o informales.

Se presenta un trabajo con metodología cualitativa (KORNBLIT y BELTRAMINO, 2004), basada en el análisis semiótico propuesto dentro del marco teórico. En lo que sigue, utilizamos esta clasificación de objetos primarios aportadas por el Enfoque Ontosemiótico (GODINO *et al.*, 2007; 2019), para detallar cada uno de estos tipos de objetos para el caso de la mediana. Además, se ha realizado un estudio sistemático de la investigación sobre educación estadística para describir las dificultades relacionadas con los mismos que se han identificado en la investigación didáctica. Es necesario indicar que nos hemos restringido al caso particular de la estadística descriptiva y análisis exploratorio de datos, aunque algunos de los objetos matemáticos identificados en relación con la mediana pueden generalizarse para utilizarse en probabilidad, inferencia o análisis de asociación entre variables.

3. ANÁLISIS SEMIÓTICO DE LA MEDIANA

3.1. Los problemas que resuelve la mediana

Como otros objetos matemáticos, la idea de mediana surge de las prácticas realizadas para resolver problemas. En este sentido, Cobo (2003) describe tres campos de problemas principales que se resuelven utilizando la mediana y que son los siguientes:

- CP1. Determinar una medida de centralización cuando la media no es una medida de posición central representativa. Este problema se presenta en el caso en que la distribución de la variable analizada existan valores atípicos o se identifiquen varias modas. Otra situación similar aparece con variables que tienen una distribución muy asimétrica. En estos casos la media puede ser muy poco representativa del conjunto de datos y es más representativo aquel valor de la variable que deja por encima y por debajo el mismo número de datos previamente ordenados.
- CP2. Hallar una medida de centralización si la variable es ordinal. En este tipo de variables, las diferencias numéricas de la misma no guardan proporción con las diferencias en la magnitud medida; por ello, la mediana es un mejor representante de los datos que la media. Un ejemplo, es cuando se analizan escalas de tipo Likert, que gradúan las respuestas a ciertas preguntas por el grado de acuerdo con la misma desde totalmente en desacuerdo (1) a totalmente de acuerdo (5).
- CP3. Comparar dos o más conjuntos de datos utilizando gráficos de caja. En este gráfico, muy utilizado en el análisis exploratorio de datos, se representan cinco puntos de las distribuciones: mínimo, máximo, mediana y cuartiles, así como los valores atípicos. Por tanto, es necesario el cálculo de la mediana para la construcción del gráfico. El gráfico proporciona mucha información sobre la variable; por ejemplo se destacan el 50% de los casos centrales y se divide la distribución en cuatro partes con el mismo número de elementos. También se destaca la asimetría o simetría del conjunto de datos.

A pesar de su aparente sencillez, no siempre se reconocen los campos de problemas asociados a la mediana y, por tanto, aunque muchos estudiantes calculan correctamente la mediana cuando se les pide hacerlo, no siempre saben cuándo deben utilizarla. Por ejemplo, en una investigación realizada en México con 162 estudiantes de educación secundaria y 356 estudiantes de Bachillerato (MAYÉN; DÍAZ; BATANERO, 2009), solo el 30% eligió

la mediana como mejor representante de un conjunto de datos que tenía valores atípicos cuando se les pidió hacerlo. Todos los estudiantes habían estudiado el tema el curso en que se les pasó el cuestionario. Por su parte, Boaventura y Fernández (2004), en una investigación con 181 estudiantes de segundo curso de Bachillerato, que también habían estudiado las medidas de posición central encontraron que prácticamente todos los estudiantes eligieron la media o la moda como representante de un conjunto de datos, sin tener en cuenta la mediana en los casos en que era preferible. También Bakker y Gravemeijer (2006) indican que los estudiantes holandeses con los que trabajaron en un curso de estadística no consideraron que la mediana era un representante adecuado de un conjunto de datos. Estos errores se repiten en una investigación de Delson y Mugabe (2013) con estudiantes universitarios y en la de Groth y Bergner (2006) con futuros profesores de educación primaria. Como podemos ver, las investigaciones didácticas demuestran que este problema persiste a lo largo de todos los niveles educativos, incluidos los cursos de formación de profesores.

3.2. Lenguaje asociado a la mediana

Puesto que el objeto matemático abstracto no es tangible ni visible, para trabajar con él es representado mediante diferentes representaciones, que también permiten describir las propiedades, así como para exponer las soluciones a los problemas y trabajar con sus datos. Siguiendo a Ortiz, Batanero y Serrano (2001) vamos a distinguir tres tipos de lenguaje:

- *Lenguaje verbal*: que se refiere a los términos y expresiones matemáticos o tomados del lenguaje natural que permiten referirse a un objeto matemático; en nuestro estudio, además de presentarse la palabra “mediana”, se utilizan para denominarla expresiones como percentil 50, quinto decil o segundo cuartil, que son palabras puramente matemáticas. Pero también tenemos términos como centro orden, menor, mayor que se utilizan en la vida diaria. Todos estos términos y expresiones, como “la mediana es el centro de un conjunto de datos ordenados” o “la mediana está situada entre el mínimo el máximo de la distribución” deben ser conocidos y utilizados por el estudiante.
- *Lenguaje simbólico*: para trabajar en matemáticas utilizamos con frecuencia símbolos, con los que operamos, por medio del álgebra, también estudiada en la escuela. Dicho lenguaje simbólico supone una gran economía de expresión para trabajar en matemáticas. Los símbolos frecuentes para trabajar con la mediana son Me , P_{50} , D_5 y Q_2 . Además, al trabajar con la mediana utilizamos otros objetos matemáticos, que son simbolizados de diversa forma: destacamos las siguientes notaciones: x_i para los datos, n_i , f_i para las frecuencias absolutas y relativas, N_i , F_i para las frecuencias acumuladas absolutas y relativas, I_{i-1} e I_i para los extremos inferior y superior de un intervalo respectivamente, y n para referirnos al número total de datos. Se usan también símbolos y expresiones algebraicas en el cálculo de la mediana.
- *Lenguaje gráfico y tabular*: Este tipo de lenguaje nos permite resumir y visualizar la información de forma sencilla. En el trabajo con la mediana se utilizan listados de datos aislados, que pueden presentarse ordenados (ascendente o descendente) o desordenados, tablas de frecuencia (con diferentes tipos de frecuencias absolutas o relativas, acumuladas o no y datos aislados o agrupados en intervalos).

También se emplean gráficos como los de barras o líneas, histograma, gráficos de puntos o el gráfico de la caja.

Se ha detectado que, en muchas ocasiones, los alumnos confunden la terminología de media y mediana. Esto provoca que calculen la media cuando realmente se les está pidiendo que calculen la mediana (COBO, 2003). Del mismo modo, en el estudio de Mayén *et al.* (2009) algunos estudiantes confundieron la representación simbólica de la mediana con la de la media o la moda. Respecto al lenguaje gráfico, Gea *et al.* (2016) encuentran en un estudio con futuros profesores de educación secundaria, que el 29% no sabe interpretar correctamente el gráfico de la caja. Algunos, por ejemplo, piensan que el porcentaje de casos que hay entre cada dos de los cinco puntos representados (mínimo, cuartil 1, mediana, cuartil 2 y máximo) que definen el gráfico es diferente.

3.3. Definiciones de la mediana

Existen diferentes definiciones equivalentes para la mediana, según las propiedades que se quieran destacar de la misma:

- La siguiente definición: “La mediana, valor mediano o valor central de una serie numérica es el valor que ocupa el punto central cuando la serie está ordenada creciente o decrecientemente” (NORTES CHECA, 1993, p. 69) destaca la propiedad de ser la mediana una medida de posición central.
- En el siguiente caso se destaca que el número de casos situados por encima y por debajo de la mediana es el mismo: “Se define la mediana como el valor de la variable, tal que, supuestos ordenados todos los valores numéricos de la variable en orden creciente, la mitad son inferiores a él y la otra mitad iguales o superiores” (NORTES CHECA, 1993, p. 69).
- Si se quiere enfatizar la relación de la mediana con la frecuencia acumulada, se puede utilizar: “La mediana es el valor de la variable estadística tal que la ordenada del diagrama acumulativo de frecuencias absolutas es igual a $n/2$, siendo n el número de datos” (CALOT, 1988, p. 56).

Una última definición presenta la mediana como solución de una ecuación en la que interviene la función de distribución: “La mediana es el valor de la variable estadística tal que la ordenada de la curva de distribución empírica (representación gráfica de las frecuencias relativas acumuladas) es igual a $1/2$ ” (CALOT, 1988, p.56).

Barr (1980) fue uno de los primeros investigadores en estudiar la comprensión de la definición de mediana y concluyó que no es claro para los estudiantes comprender que deben ordenar previamente el conjunto de datos para determinar el valor que ocupa la posición central. Otros estudiantes toman como mediana el valor central de todos los valores de la variable sin tener en cuenta los repetidos, es decir, sin considerar la frecuencia de cada valor.

En la investigación de Carvalho (2001), los estudiantes confundieron media, mediana y moda; e incluso algunos confundieron alguna de estas medidas con un valor cualquiera de la variable. Igualmente, Mayén *et al.* (2007) indican que algunos estudiantes no reconocen la utilidad de la mediana como mejor promedio para datos ordinales y tienen gran dificultad en dar una definición coherente de mediana.

Mayén *et al.* (2009) sugieren que los estudiantes confunden media y mediana, conciben la mediana como centro del conjunto de datos desordenados o como centro geométrico de la distribución. Es decir, el valor de la mediana lo calculan restando el valor máximo y mínimo del conjunto de datos y dividiendo el valor obtenido por dos.

3.4. Propiedades de la mediana

Indiferentemente de la definición de mediana que utilicemos, la mediana tiene una serie de propiedades que se pueden clasificar en numéricas, algebraicas y estadísticas. A continuación, describimos estas propiedades siguiendo a Cobo (2003):

- Las propiedades numéricas se utilizan para comprender los valores numéricos que puede tomar la mediana. La primera sería entender que la mediana no puede ser mayor que el máximo o menor que el mínimo de los datos; es decir, se encuentra dentro del rango de valores que toma la variable. Además, aunque puede coincidir con uno de estos valores o con uno de los datos intermedios, el alumno debe saber que no tiene que ser necesariamente igual a un valor de la variable; por ejemplo, esto ocurre en el caso de indeterminación, cuando se calcula la mediana en un conjunto que presenta un número par de datos y los dos datos centrales tienen diferente valor, en cuyo caso, se suele dar como valor de la mediana la media aritmética de los dos valores que ocupan las posiciones centrales. Por otro lado, para calcular la mediana no se tienen en cuenta los valores de los datos sino la posición que éstos ocupan; por ello, si se cambia uno de los valores extremos, la mediana no cambia de valor. Esta propiedad es importante para poder comprender el motivo por el cual la media, a diferencia de la mediana, si se ve afectada por los valores extremos.
- Las propiedades algebraicas surgen al considerar la mediana como una operación sobre el conjunto de datos. En este sentido, ya que la mediana de un conjunto de números enteros podría ser un valor decimal, no es una operación interna sobre el conjunto de datos. Si añadimos un cero al conjunto de datos, la mediana puede cambiar; por tanto, no hay elemento neutro; por la misma razón, no hay elemento simétrico en el cálculo de la mediana, ni tiene la propiedad asociativa. Conserva los cambios de escala y origen, las unidades de medida de la mediana son las mismas que las de la variable en estudio y, además, es conmutativa (el orden inicial de los datos, ya sea ascendente o descendente, no afecta al valor de la mediana).
- Las propiedades estadísticas se deducen cuando consideramos la mediana como un resumen de los datos. Entre ellas, destacamos que la mediana es un representante del conjunto global de datos (no da información sobre datos concretos), es preferible a la media o la moda en distribuciones asimétricas, con presencia de valores atípicos y no unimodales. Su uso también es más adecuado cuando la variable está agrupada en intervalos y algunos de ellos son intervalos abiertos o cuando se trabaja con variables cualitativas ordinales. Además, es una medida robusta, es decir, su valor no cambia ante la presencia de valores atípicos.

La comprensión de estas propiedades fue analizada por Cobo (2003) indicando que los estudiantes atribuyen a la mediana propiedades que no tiene, como ser una operación

interna o no percibir el efecto de un valor atípico. Mayén *et al.* (2009) también estudian la comprensión de estas propiedades e indican que los estudiantes generalizan propiedades de operaciones aritméticas atribuyéndoselas a la mediana; por ejemplo, suponen que es una operación interna (de modo que un conjunto de datos enteros ha de tener una mediana entera). Sitúan la mediana en el centro de la distribución, aunque esto sólo ocurre si la distribución es simétrica. Otros estudiantes no entienden el concepto de valor atípico ni el por qué conviene usar la mediana en presencia de valores atípicos.

3.5. Procedimientos de cálculo

La mediana no tiene un único procedimiento de cálculo, sino que depende del tipo de datos y la forma en que se presentan. Cobo y Batanero (2000) describen los siguientes procedimientos de cálculo de la mediana:

- Cuando los datos no están agrupados y el número de datos es impar, se calcula la mediana simplemente tomando el valor de la variable situado en el centro de la lista de datos ordenados por valores crecientes o decrecientes.
- Para un número par de datos no agrupados, la mediana es la media aritmética de los dos valores que se encuentren en el centro de la lista de datos ordenados por valores crecientes o decrecientes de la variable.
- Si los datos vienen dados en una tabla de frecuencias, la mediana puede obtenerse de forma gráfica a partir del diagrama acumulativo de frecuencias, buscando el valor de la variable que corresponde la frecuencia acumulada $n/2$ o la frecuencia relativa acumulada $1/2$. A veces nos encontramos con el problema de que la ecuación $F(M)=1/2$, en general, no tiene solución puesto que la función $F(x)$ varía por saltos. Esto da lugar a varios procedimientos de cálculo. Si el número de datos es impar, el valor $n/2$ corta a la gráfica en el salto del diagrama acumulativo para uno de los valores de la variable que coincide con el valor de la mediana. Si el número de datos es par, la mediana está indeterminada entre los valores x_i y x_{i+1} y suele tomarse como mediana la media aritmética de estos dos valores.
- Si los datos de la tabla están agrupados en intervalos, además del procedimiento anterior, generalmente hay que interpolar para encontrar el valor exacto de la mediana.
- Para datos presentados mediante un gráfico, el cálculo dependerá del tipo de gráfico y puede ser bastante variable, como se describe en Cobo (2003). En todos los casos, el cálculo de la mediana implica tener en cuenta que ésta es el valor que divide a la población ordenada en dos partes de igual tamaño y, en consecuencia, su relación con otros conceptos, como frecuencias absolutas y relativas, acumuladas o sin acumular.

Esta existencia de varios algoritmos de cálculo, supone una gran dificultad, pues, como indica Schuyten (1991), aunque se comprenda la definición de mediana para llegar a su cálculo, hay que seguir una serie de pasos y tomar decisiones que el estudiante aprende de memoria sin comprenderlas realmente. Otros estudiantes son capaces de calcular la mediana de un conjunto pequeño de datos, pero no cuando se les dan organizados en una tabla de frecuencias (SCHUYTEN, 2001).

Estepa (1994) encontró estudiantes que presentaban dificultades para calcular la mediana a partir de las representaciones gráficas de las frecuencias acumuladas. En el caso de que la variable no esté agrupada en intervalos, se considera como representación la gráfica de frecuencias acumuladas que toma forma de escalera, pero los estudiantes no están acostumbrados a este tipo de funciones. Para las variables agrupadas en intervalos, una vez construido el diagrama acumulativo de frecuencias acumuladas, el estudiante tiene que interpolar para hallar el valor de la mediana y los fallos se producen por falta de razonamiento proporcional e insuficiente dominio del manejo de desigualdades.

Carvalho (2001) observa que los estudiantes no ordenan los datos para calcular la mediana, error también encontrado en Cobo (2003) y Mayén *et al.* (2009). Igualmente, en estas tres investigaciones los estudiantes a veces asignan a la mediana el valor de una frecuencia en lugar de un valor de la variable. Por su parte, Cobo (2003) encontró que lo más difícil para los estudiantes de su muestra fue calcular la mediana a partir de un gráfico, posiblemente por falta de competencia en la lectura del mismo.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha realizado un análisis del objeto matemático mediana, utilizando los diferentes tipos de objetos matemáticos primarios definidos en el enfoque ontosemiótico (GODINO, 2002; GODINO *et al.*, 2007; 2019). Este análisis ha permitido revelar la gran complejidad de un resumen estadístico aparentemente sencillo, pero que tiene múltiples facetas y se relaciona con otros objetos matemáticos, como orden, variable, distribución de datos, posición central o valor atípico.

El análisis ha permitido también clasificar las dificultades descritas en la investigación didáctica que aparecen en estudiantes de diferentes edades y niveles educativos e incluso en futuros profesores. Cada uno de los elementos descritos en este trabajo debe ser objeto de enseñanza, pues, por ejemplo, la comprensión de la definición no ayuda al estudiante a realizar un cálculo correcto, debido a los numerosos algoritmos diferentes, que dependen del tipo de datos y de cómo se presentan. Por otro lado, incluso cuando se sabe calcular, no siempre se sabe cuándo se debe utilizarla mediana, quizás porque sea más frecuente pedir al estudiante calcular la mediana, que proponerle problemas donde debe elegir entre media, mediana y moda.

Ya que las mismas dificultades aparecen en contextos diferentes, quizás nos debiéramos replantear su enseñanza. En primer lugar, la existencia de numerosos applets en internet o incluso la hoja de cálculo permiten calcular correctamente la mediana, por tanto, sugerimos reducir el tiempo dedicado al aprendizaje mecánico de algoritmos con el objetivo de reforzar la comprensión conceptual.

Nuestra sugerencia es emplear este tiempo en profundizar en las propiedades de la mediana y sus distintas aplicaciones, conocimientos que son mucho más útiles y que no resuelve un software estadístico. Pensamos que el trabajo con proyectos estadísticos, usando datos reales, que con frecuencia no siguen la distribución normal o tienen valores atípicos, pueden reforzar el conocimiento de propiedades. Es decir, la utilización de esta metodología para el trabajo de los contenidos de estadística se fundamenta en la presentación de

situaciones que estén ligadas a los campos de problemas. Por tanto, plantean situaciones en las que emerjan el objeto matemático descrito y que, por tanto, pueden dar sentido al mismo. No obstante, como sugieren Bakker y Gravemeijer (2006) la elección de un conjunto de datos que contengan valores atípicos o distribuciones marcadamente asimétricas pueden suscitar tareas en las que se pueda discernir con el estudiante el cálculo de la media o la mediana como valor central. Finalmente, consideramos también relevante poner el foco de atención en la necesidad de reforzar el conocimiento sobre el tema en los futuros profesores, algunos de los cuales comparten las dificultades descritas en los estudiantes. Una adecuada preparación del profesor hará posible una mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística.

Agradecimientos: Proyecto PID2019-105601GB-I00/AEI/10.13039/501100011033y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

BARR, G. V. Some student ideas on the median and the mode. **Teaching Statistics**, 2(2), 1980. 38-41 p.

BAKKER, A.; GRAVEMEIJER, K. P. An historical phenomenology of mean and median. **Educational Studies in Mathematics**, 62(2), 2006. 149-168 p.

BATANERO, C. Statistical sense in the information society. En K. O. Villalba-Condori, A. Adúriz-Bravo, F. J. García-Peñalvo y J. Lavonen (Eds.), *Actas del Congreso Internacional Sobre Educación y Tecnología en Ciencias – CISETC* (pp. 28-38). Aachen, Germany: CEUR-WS.org. 2019.

BOAVENTURA, M. G.; FERNÁNDES, J. Dificuldades de alunos do 12º ano nas medidas de tendência central: O contributo dos manuais escolares. Em J. A. Fernandes (Ed.). *Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*, pp. 103-126, 2004. Braga: Universidade da Minho.

CALOT G. **Curso de estadística descriptiva**. Madrid: Paraninfo. 1988.

CARVALHO, C. **Interação entre pares. Contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade**. Tesis Doctoral. Universidad de Lisboa. 2001.

COBO, B. **Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria**. Tesis doctoral. Universidad de Granada. 2003.

COBO, B.; BATANERO, C. La mediana en la educación secundaria obligatoria: ¿un concepto sencillo? **UNO**, 23, 2000. 85-96 p.

DELSON, A.; MUGABE, D.O conceito da mediana na perspectiva dos estudantes principiantes. **International Journal of Scientific & Technology Research**, 2(9), 2013. 202-206 p.

ENGEL, J. Cultura estadística y sociedad. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. 2019. www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html.

ESTEPA, A. **Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores**. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. 1994.

GAL, I.; OGRAJENŠEK, I. Official statistics and statistics education: Bridging the gap. **Journal of Official Statistics**, 33(1), 2017. 79-100 p.

GEA, M. M.; BATANERO, C.; FERNÁNDEZ, J. A.; ARTEAGA, P. Interpretación de resúmenes estadísticos por futuros profesores de educación secundaria. **Journal of Research in Mathematics Education**, 5(2), 2016. 135-157 p.

GODINO, J.D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, 22(2/3), 2002. 237-284 p.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 14(3), 1994. 325-355 p.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* p. 177-195. 1998. Dordrecht: Kluwer.

GODINO, J.D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, 39(1-2), 127-135. 2007.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. **For the Learning of Mathematics**, 39(1), 2019. 38-43 p.

GROTH, R. E ; BERGNER, J. A. Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode. **Mathematical Thinking and Learning**, 8, 2006. 37-63 p. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0801_3

HOLCOMB, Z. C. **Fundamentals of descriptive statistics**. London: Routledge. 2016.

JACOBBE, T.; CARVALHO, C. Teachers' understanding of averages. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education*, p. 199-209., 2011. New York: Springer.

KORNBLIT, A. L.; BELTRAMINO, F.G. **Metodologías cualitativas en ciencias sociales: modelos y procedimientos de análisis**. Editorial Biblos. 2004.

MAYÉN, S. **Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato**. Tesis doctoral. Universidad de Granada. 2009.

MAYÉN, S.; COBO, B., BATANERO, C.; BALDERAS, P. Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato. **Unión**, 9(1), 2007. 187-201 p.

MAYÉN, S.; DÍAZ, C.; BATANERO, C. Conflictos semióticos de estudiantes con el concepto de mediana. **Statistics Education Research Journal**, 8(2). 2009.

MECD. **Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria y del Bachillerato**. Madrid: MECD. 2015.

MORGENTHALER, S. Exploratory data analysis. **Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics**, 1(1), 2009. 33-44 p.

NORTES CHECA, A. **Estadística teórica y aplicada**. Barcelona: PPU. 1993.

ORTIZ, J. J.; BATANERO, C.; SERRANO, L. El lenguaje probabilístico en los libros de texto. **Suma**, 38, 2001. 5-14 p.

SCHLEPPEGRELL, M. The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. **Reading and Writing Quarterly**, 23, 2007. 139-159 p.

SCHUYTEN, G. **Statistical thinking in psychology and education**. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics*. v. 2, p. 486-490., 1991. Dunedin: ISI.

SCHUYTEN, G. **Research skills: A closely connected triplet of research area, research methodology and statistics**. En C. Batanero (Ed.), *Training researchers in the use of statistics: IASE Round Table Conference*, p. 227-230., 2001. Granada.

DADOS DAS AUTORAS

SILVIA M. VALENZUELA RUIZ

Universidad de Granada (UGR), Granada – España. E-mail: svalenzuela@ugr.es

NURIA BEGUÉ PEDROSA

Universidad de Zaragoza (UNIZAR), Zaragoza – España.

JOCELYN Díaz PALLAUTA

Universidad de Granada (UGR), Granada – España.

Submetido em: 07-02-2021

Aceito em: 17-01-2022